

8 класс

Время выполнения работы – 240 минут. Баллы, набранные за решение каждой задачи, суммируются. Максимальный возможный балл – 100.

1. (10 баллов) Петя задумал 6 различных чисел a, b, c, d, e, f и произнес следующие утверждения: « $a > d$ », « $f > c$ », « $b > e$ », « $a > f$ », « $a > e$ », « $d > b$ », « $c > e$ ». Известно, что среди этих утверждений не более двух неверных. Можно ли на основании этих данных найти хотя бы одно заведомо верное утверждение?
2. (15 баллов) Делитель натурального числа называется собственным, если он больше 1, но меньше этого числа. Семиклассник Семёнов придумал натуральное число, у которого есть собственные делители, делящиеся на 3, и есть собственные делители, делящиеся на 2. Какие значения может принимать разность между самым большим собственным делителем этого числа, делящимся на 3, и самым большим собственным делителем этого числа, делящимся на 2? Дайте полный ответ на этот вопрос и объясните, почему другие варианты ответа невозможны.
3. (15 баллов) Десять целых чисел подобраны так, что сумма их модулей на 2 больше модуля их суммы. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел по модулю равно 1.
4. (20 баллов) Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $\angle ABC=30^\circ$, $\angle BAC=90^\circ$, $\angle ACD=85^\circ$, $\angle ADC=20^\circ$. Докажите, что $AB+BC > CD$.
5. (20 баллов) Каждая клетка доски 18×18 может быть покрашена в черный или белый цвет. Изначально все клетки белые. Разрешается перекрашивать все клетки какой-нибудь строчки или какого-нибудь столбца в противоположный цвет. Можно ли получить раскраску, содержащую ровно 16 черных клеток?
6. (20 баллов) На столе лежат шесть одинаковых на вид монет. Известно, что три из них – настоящие (весащие одинаково), а три других – фальшивые (также весащие одинаково), более легкие, чем настоящие. Вася принес с собой еще одну монету (одного из двух описанных типов). За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь он сможет наверняка выяснить, настоящая это монета или фальшивая?